ESCUELA MILITAR DE INGENIERIA
ÁLGEBRA I
Misceláneas de problemas
2014

Tema: RELACIONES Y FUNCIONES.

Elaborado por: ***Lic. Bismar Choque Nina***

No enseñar a un hombre que está dispuesto a aprender es desaprovechar a un hombre.
Enseñar a quien no está dispuesto a aprender es malgastar las palabras

RELACIONES

1. Considere a los conjuntos $A = \{\text{huevos, leche, maíz}\}$ y $B = \{\text{vacas, cabras, gallinas}\}$. Escribir la relación R de A en B definida por:

$$(a, b) \in R \Leftrightarrow a \text{ es producto por } b$$

2. Sea $R \subseteq \mathbb{Z}$ la relación definida por $(n, m) \in R \Leftrightarrow n$ es múltiplo de m. Determinase cuales de las siguientes proposiciones son verdaderas:

   a) $(1, 6) \in R$

   b) $(0, 2) \in R$

   c) $(2, 0) \in R$

   d) $2R6$

   e) $-4R2$

   f) $-20R-4$

3. Para $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{10, 11, 12, 13, 14\}$, escribir los elementos de la relación $R \subseteq A \times B$, donde

$$aRb \text{ si y sólo si } a \text{ divide exactamente a } b$$

4. Una relación binaria sobre el conjunto de los números reales puede representarse gráficamente en el plano cartesiano. Grafique la relación:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| + |y| = 1\}$$

5. Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}/1 < x \leq 6\}$, y sea R una relación de A en B definida por

$$xRy \iff x > y - 2$$

   a) Definir R por extensión.

   b) Representar gráficamente (Las tres formas)

   c) Determinar: D_R, I_R y R^{-1}

6. Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 6\}$, y sea R una relación de A en B definida por:

$$xRy \iff x + y \text{ es par}$$

   a) Determinar R y R^{-1} por extensión.

   b) Representar gráficamente la relación.

   c) Determinar: D_R, I_R

7. Dados los conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{Z}/(x^2 - 2)^2 = x^2\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N}/1 < x \leq 5\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z}/ - 3 < x \leq 3\}$$

   y las relaciones $R \subset A \times B$ y $S \subset B \times C$ se definen mediante:

$$xRy \iff x + y \text{ es múltiplo de 5,} \qquad ySz \iff 3 \mid y + z$$

   a) Definir R y S por extensión.

   b) Graficar R y S

   c) Definir la composición $S \circ R \subset A \times C$ por extensión.

   d) Graficar la composición por Diagramas de Venn *e*) Determinar el dominio y la imagen de las tres relaciones.

f) Determinar $R^{-1}, S^{-1}, (S \circ R)^{-1}$ y $R^{-1} \circ S^{-1}$

8. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y se define la relación:

$$aRb \text{ si y sólo si } b \text{ es múltiplo de } a$$

Escriba la relación.

9. En $A = \{2, 3, 6, 7, 9\}$ se define una relación R mediante

$$xRy \Longleftrightarrow x \mid y$$

a) Determinar R por extensión.

b) Graficar R

c) Determinar D_R, I_R y R^{-1}

10. En $\mathbb{R}$ se definen las siguientes relaciones:

a) $xRy \Longleftrightarrow x^2 = y^2$

b) $xRy \Longleftrightarrow (x-1)^2 = (y+1)^2$

c) $xRy \Longleftrightarrow |x| = |y-2|$

Obtener los gráficos cartesianos de estas relaciones.

11. Determine todas las relaciones posibles en cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $A = \emptyset$

b) $B = \{1\}$

c) $C = \{1, 2\}$

12. En cada uno de los siguientes ejercicios, determine las propiedades que cumple la relación R definida en $A = \{a, b, c, d, e\}$

a) Si $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$

b) Si $R = \{(a, b), (b, d), (c, e), (e, c)\}$

c) Si $R = \{(a, b), (a, d), (c, b), (e, d)\}$

13. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (3, 2), (4, 4)\}$ una relación definida en A. ¿Es reflexiva?

14. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$ una relación definida en A. ¿Es simétrica?

15. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$ una relación definida en A. ¿Es asimétrica?

16. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $R = \{(1, 2), (2, 2), (3, 4), (4, 1)\}$ una relación definida en A. ¿Es antisimétrica?

17. En el conjunto de los números enteros, se considera la relación:

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a \leq b\}$$

¿Es simétrica?, ¿Es antisimétrica?

18. Determine las propiedades que cumple la relación R definida en $\mathbb{R}$ mediante

$$xRy \Longleftrightarrow |x + y| = 2$$

19. En el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros se considera la relación R definida por:

$$xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$$

Estudiar la simetría y antisimetría de R.

20. Determinar las propiedades de las siguientes relaciones, indicando cuales son reflexivas, simétricas, antisimétricas y transitivas.

   a) R es la relación definida en $\mathbb{Z}$, donde $xRy \Leftrightarrow x + y$ es par.
   b) R es la relación definida en $\mathbb{Z}$, donde $xRy \Leftrightarrow x + y$ es impar.
   c) R es la relación definida en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, donde $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a \leq c$

21. Sea E el conjunto de los seres humanos. Determine las propiedades que cumple las siguientes relaciones:

   a) $aRb \Longleftrightarrow a$ es hijo de b.
   b) $aRb \Longleftrightarrow a$ está casado con b.
   c) $aRb \Longleftrightarrow a$ es de la misma nacionalidad que b.

22. Sea $E = \mathbb{N}$ se define la relación $aRb \Longleftrightarrow a$ divide a b. Determine que propiedades cumple.

23. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define la siguiente relación

$$xRy \Longleftrightarrow 3|x + y$$

   a) Definir R por extensión.
   b) Formar el diagrama de R.
   c) Clasificar R

24. Dibuje la representación cartesiana de R definida en $\mathbb{R}$, por:

   a) $R = \{(x, y)/x + 2y < 2\}$
   b) $R = \{(x, y)/x < y, 0 \leq y \leq 1\}$

25. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define una relación por:

$$xRy \Longleftrightarrow 3|x - y$$

   a) Definir R por extensión.
   b) Graficar R.
   c) Probar que R es de equivalencia.
   d) Determinar las clases de equivalencia.
   e) Obtener un conjunto de índices y el conjunto cociente.

26. En el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ se considera la siguiente relación:

$$xRy \Longleftrightarrow |x - 2| = |y - 2|$$

   a) Definir R por extensión y graficar.
   b) Demuestre que la relación es de equivalencia.
   c) Obtener las clases de equivalencia.
   d) Determine la correspondiente partición de A.

27. Sea $A = \{a, b, c, d, e\}$, y sea $\{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$ una partición de A. Determinar la relación de equivalencia correspondiente en A.

28. Si $\{\{a, c, e\}, \{b, d, f\}\}$ es una partición del conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, determinar la relación de equivalencia correspondiente.

29. El conjunto $\{\{1, 2, 3\}, \{4\}, \{5\}\}$ es una partición de $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinar la relación de equivalencia correspondiente en A.

30. Sea $A = \{1,2,3,4\}$ y $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,3),(3,3),(4,4)\}$. Determinar si R es de equivalencia.

31. Sea $A = \{a,b,c,d\}$ y $R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d)\}$, una relación de equivalencia. Determinar el conjunto cociente A/R.

32. En $\mathbb{Z}$ se considera la siguiente relación:

$$xRy \Longleftrightarrow 3|x-y$$

 a) Probar que es de equivalencia.

 b) Determinar las clases de equivalencia.

 c) Determinar un conjunto de índices y el conjunto cociente.

33. En $\mathbb{Z}$ se define la siguiente relación, mediante:

$$xRy \Longleftrightarrow x^2 - x = y^2 - y$$

 a) Demuestre que es de equivalencia.

 b) Obtener las clases de equivalencia.

 c) Determine un conjunto de índices y el conjunto cociente.

34. En $\mathbb{Z}$ se define la relación R, mediante:

$$xRy \Longleftrightarrow (x+1)^2 = (y+1)^2$$

 a) Demuestre que es de equivalencia.

 b) Determine las clases de equivalencia.

 c) Obtener un conjunto de índices y el conjunto cociente.

35. En $\mathbb{R}$ se considera la siguiente relación:

$$xRy \Longleftrightarrow x^2 = y^2$$

 a) Probar que es de equivalencia, y graficar R.

 b) Obtener las clases de equivalencia.

 c) Obtener un conjunto de índices y la partición de R.

36. En $\mathbb{R}$ se considera la siguiente relación:

$$xRy \Longleftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$$

a) Demuestre que es de equivalencia, graficarla.

b) Determine las clases de equivalencia.

c) Determine un conjunto de índices y el conjunto cociente.

37. En $\mathbb{R}$ se define la relación R mediante:

$$xRy \Longleftrightarrow x^2 + 3y = y^2 + 3x$$

a) Probar que es de equivalencia, y graficarla.

b) Obtener las clases de equivalencia.

c) Obtener un conjunto de índices y el conjunto cociente.

38. En $\mathbb{R}$ se define una relación R mediante:

$$xRy \Longleftrightarrow |2x - 1| = |2y - 1|$$

a) Demuestre que es de equivalencia, y graficar R

b) Obtener las clases de equivalencia.

c) Determine un conjunto de índices y la partición de R.

39. En $A = [-1, 1]$ se considera la siguiente relación:

$$xRy \Longleftrightarrow |x| = |y|$$

a) Probar que es de equivalencia, graficar.

b) Obtener las clases de equivalencia.

c) Obtener un conjunto de índices y la partición de A.

40. En $\mathbb{N}$ se define la siguiente relación, mediante:

$$xRy \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 2^n \text{ para algún } n \in \mathbb{Z}$$

a) Verifique que la relación es de equivalencia.

b) Determine las clases de equivalencia.

41. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 3\}$. En $\mathcal{P}(A)$ se define la siguiente relación mediante:

$$XRY \Longleftrightarrow X \cap B = Y \cap B$$

a) Muestre que es una relación de equivalencia.

b) Describa sus clases de equivalencia.

c) Determine un conjunto de índices y el conjunto cociente.

42. Sean R y S relaciones definidas en un conjunto A. Si R y S son relaciones reflexivas, demuestre que $R \cap S$ y $R \cup S$ son reflexivas.

43. Sean R y S relaciones definidas en un conjunto A. Si R y S son relaciones transitivas, demuestre que $R \cap S$ es transitiva.

44. Sea R una relación definida en un conjunto A. Demuestre que la relación $R \cup R^{-1}$ es simétrica.

45. Sea R una relación definida en A.

    Demostrar:

    a) R es simétrica, entonces R^{-1} es simétrica.

    b) R es transitiva, entonces R^{-1} es transitiva.

46. En $\mathbb{N}^2$ se considera la siguiente relación:

$$(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$$

    Demostrar que es de equivalencia y obtener las clases de equivalencia.

47. Clasificar (Determinar las propiedades que cumple) la relación R definida en $\mathbb{Z}^2$ mediante:

$$(a, b)R(a', b') \Leftrightarrow ab' = ba'$$

48. En $\mathbb{R}^2$ se define la relación binaria R mediante:

$$(x, y)R(a, b) \Leftrightarrow y = b$$

    Probar que es de equivalencia y determinar las clases de equivalencia.

49. En $\mathbb{N}^2$ se considera la siguiente relación:

$$(x, y)R(a, b) \Leftrightarrow x + y = a + b$$

    Muestre que es una relación de equivalencia y obtener las clases de equivalencia.

50. En $\mathbb{Z}^2$ se define la siguiente relación:

$$(x, y)R(a, b) \Leftrightarrow x + b = y + a$$

Demuestre que es una relación de equivalencia y determine las clases de equivalencia.

51. En $\mathbb{Z}^2$ se considera la siguiente relación, definida por:

$$(x, y)R(a, b) \Leftrightarrow xb = ya$$

Muestre que es una relación de equivalencia y obtener las clases de equivalencia.

52. Sean R y S dos relaciones de equivalencia definidas en los conjuntos A y B, respectivamente. En $A \times B$ se define una relación T mediante:

$$(x, y)T(a, b) \Longleftrightarrow xRa \wedge ySb$$

Demuestre que la relación T es de equivalencia.

53. Probar que la relación "*menor o igual*"definida en el conjunto $\mathbb{Z}$ es de orden.

54. La relación "*menor que*"definida en el conjunto $\mathbb{Z}$, ¿es de orden?

55. En el conjunto $\mathbb{Z}^+$, se considera la relación de divisibilidad, es decir, para ca par de enteros a y b,

$$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a|\, b$$

Probar que es de orden.

El mecanismo electoral ha
sido establecido en función
de las municipales.
(acervo criollo)

FUNCIONES

1. Señale si las siguientes relaciones son o no funciones:

   a) En $R \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ donde $(\frac{a}{b})R(a - b)$

   b) En $R \subset (\mathbb{N} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$ donde $nR(\frac{1}{n})$

   c) En $R \subset \mathbb{R}^2$ donde $xRy \Leftrightarrow xy^2 = 1$

2. Sean $A = \{-1, 1, 2, 3\}$ y $B = \{-1, 2, 5, 7, 9\}$, y sean las relaciones:

$$R = \{(-1,-1),(1,-1),(2,2),(3,9)\} \quad S = \{(-1,7),(1,-1),(2,9),(3,7)(2,2)\}$$

   a) Determine si cada una de estas relaciones es una función o no.

   b) Si es una función determine su imagen.

   c) Si es una función determine su preimagen (ie. $f^{-1}(I(f))$)

3. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

   Determine:

   a) $f(\mathbb{R}^+)$

   b) $f(\{-1, 1\})$

   c) $f([-a, a]), a > 0$

   d) $f^{-1}(\{4, 8, 12\})$

   e) $f^{-1}([-a, a]), a > 0$

4. Sea $A = \{-2, -1, 1, 3\}$ y $B = \{-2, 1, 3, 6\}$, y sea $f : A \to B$ una función tal que $f(x) = x^2 - 3$. Representar gráficamente y clasificar f.

5. Sea $A = \{-2, -1, 1, 3\}$ representar (graficar) y clasificar la función $f : A \to \mathbb{Z}$ tal que $f = \{(-2, 1), (-1, 2), (1, 1), (3, 0)\}$.

6. Por definición, parte entera de un número real x es el mayor entero que no supera a x. Si e es la parte entera de x se verifica

$$e \leq x < e + 1$$

   Para denotar la parte entera del número real x, se usan las notaciones $ent(x)$ o $|[x]\!]$.

   Estudiar, representar y clasificar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = |[x]\!]$

7. Representar y clasificar la función mantisa, que se denota y se define por:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x - |[x]\!] \end{aligned}$$

8. Representar y clasificar las siguientes funciones:

   a)
   $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x - 1 \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to [1, +\infty[\\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

   c)
   $$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Q} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{x-1}{2} \end{aligned}$$

9. Representar y clasificar las siguientes funciones:

   a)
   $$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 2x \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto f(x) = 2x - 1 \end{aligned}$$

   c)
   $$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = -2x + 1 \end{aligned}$$

10. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4\}$. Representar y clasificar la función:
    $$\begin{aligned} f : A \times B &\to \mathbb{Z} \\ (a, b) &\mapsto f(a, b) = 3a - 2b \end{aligned}$$

11. Dados $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$ representar por Venn y clasificar la siguiente función:
    $$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(A) &\to \mathcal{P}(B) \\ X &\mapsto f(X) = B - X \end{aligned}$$

Para cada una de las siguientes funciones $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, determine cuáles de ellas son inyectivas y cuales son sobreyectivas. Si la función no es sobreyectiva, determine $I(f)$.

12. $f(x) = 2x - 1$

13. $f(x) = 2 - x$

14. $f(x) = x^2 - 3$

15. $f(x) = x^2 - 2x$

16. $f(x) = x^3 - 1$

17. $f(x) = (x + 1)^3 - 1$

18. Definir aplicaciones no constantes, con los dominios y codominios que se indican:

    a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$
    b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ (que sea biyectiva)
    c) $h : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$

19. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

    Determinar las preimágenes de los siguientes subconjuntos del codominio:

    a) $[-1, 1[$
    b) $]-\infty, \frac{1}{2}]$
    c) $[0, 3]$
    d) $[0, 3[$
    e) $[1, 10]$

20. Sea $f : X \to Y$ una función inyectiva. Demostrar que $\forall A \subset X$ se cumple $f^{-1}[f(A)] = A$

21. Sean $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ y $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ funciones, tales que:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + 1 \qquad g(x) = [\![x]\!]$$

    Definir: $g \circ f, f \circ g$, determinar $(g \circ f)(-2), (f \circ g)(-\frac{1}{2})$ y hallar $I(g \circ f), I(f), I(g)$.

22. Sean las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 1 \\ -x^2 & \text{si } x < 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 - 2x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

    Hallar: $f \circ g$ y $g \circ f$

23. Las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son tales que $g \circ f$ es sobreyectiva. Demostrar que g es sobreyectiva.

24. Las funciones $f : A \to B, g : B \to C$ y $h : C \to D$ son tales que $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas. Demostrar que f, g y h son biyectivas.

25. Las funciones $f : A \to B, g : B \to C$ y $h : C \to D$ son tales que $h \circ g \circ f$ y $f \circ h \circ g$ son sobreyectivas, mientras que $g \circ f \circ h$ es inyectiva. Demostrar que f, g y h son biyectivas.

26. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{2x-1}{2} \end{aligned}$$

    Hallar:

$$(f \circ f)(x), \quad (f \circ f \circ f)(x), \quad (f \circ f \circ f \circ f)(x)$$

27. Sea $f, g, h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definidas por:

$$f(x) = x + 1 \quad g(x) = 2x \quad h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es impar} \\ 1, & \text{si } x \text{ es par.} \end{cases}$$

    Hallar:

    a) $f \circ g, \quad g \circ f, \quad f \circ h, \quad g \circ h, \quad f \circ (g \circ h), \quad (f \circ g) \circ h$
    b) $f \circ f \circ f \circ f, \quad g \circ g \circ g \circ g, \quad h \circ h \circ h \circ h$

28. Sea $f : X \to Y$ una función, y los subconjuntos $A \subset X$ y $B \subset Y$. Demostrar las siguientes relaciones:

    a) $A \subset f^{-1}[f(A)]$
    b) $f[f^{-1}(B)] \subset B$
    c) $f(X) - f(A) \subset f(X - A)$

d) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$

e) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$

29. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ está definida por $f(x) = (x, -x)$. Demostrar:

    a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

    b) $f(k \cdot x) = k \cdot f(x)$, donde $k \in \mathbb{R}$

    Nota: Las condiciones $a)$ y $b)$ confieren a f el carácter de función lineal.

30. Sea $f : X \to Y$. Demostrar la equivalencia de las siguientes proposiciones cualesquiera que sean $A \subset X$ y $B \subset X$

    a) $f^{-1}[f(A)] = A$

    b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

    c) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$

    d) $B \subset A \Rightarrow f(A - B) = f(A) - f(B)$

31. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y sea $f : A \to A$ definida por

$$f = \{(1, 4), (2, 1), (3, 4), (4, 2), (5, 3)\}$$

    Hallar: $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(\{4, 5\})$, $f^{-1}(\{1, 2, 3\})$, $f^{-1}(\{3, 4, 5\})$

32. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = 3x - 2 \qquad g(x) = x^3 + 1$$

    Hallar: f^{-1}, g^{-1}, $f \circ g$, $g^{-1} \circ f^{-1}, (f \circ g)^{-1}$

33. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to]-1, 1[\\ x &\mapsto f(x) = \frac{x}{1 - |x|} \end{aligned}$$

    a) Probar que es biyectiva.

    b) Hallar $f^{-1}(x)$

34. Sea

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -2x, & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

a) Demuestre que f es biyectiva.

b) Determine f^{-1}

35. Sea $f : A \to B$, y sean $B_1, B_2 \subset B$, demuestre que:

a) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$

b) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

c) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

d) $f^{-1}(B_1 - B_2) = f^{-1}(B_1) - f^{-1}(B_2)$

36. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = \dfrac{3x+1}{2}$ y $g^{-1}(x) = \dfrac{2x-1}{3}$. Hallar $(f^{-1} \circ g)(x)$

37. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = \dfrac{4x-3}{2}$ y $(f \circ g)(x) = \dfrac{6x-2}{3}$. Hallar $g(x)$

38. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $(g \circ f)(x) = \dfrac{3x-4}{2}$, $g(x) = \dfrac{2x-6}{3}$. Hallar $f(x)$

39. Demuestre que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.

40. Demuestre que si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.

41. Sean las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Demuestre que, si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.

42. Sean las funciones $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Demuestre que, si $g \circ f$ es sobreyectiva, entonces g es sobreyectiva.

43. $f : A \to B$ y $g : B \to C$, y sea $h : A \times B \to B \times C$ tal que

$$h(x, y) = (f(x), g(y))$$

Demuestre que h es biyectiva si y sólo si f y g son biyectivas.