ESCUELA MILITAR DE INGENIERÍA

MISCELÁNEAS DE PROBLEMAS

ÁLGEBRA I

Imaginario: guardia que no efectúa rondas, pero se encuentra en un lugar fijo dispuesto a intervenir si fuera necesario. (boinazo para el autor, imaginario según el diccionario práctico de la lengua española)

NUMEROS COMPLEJOS.

1. Clasifica los siguientes números complejos en reales e imaginarios. Mencionar, para cada uno, cuál es la parte real y cuál la imaginaria.

   a) $3i$
   b) $\frac{1}{3} - \frac{5}{2}$
   c) $\frac{6}{5}$
   d) $3 - 5i$
   e) 0
   f) i
   g) $\frac{1}{3} - i$
   h) 15

2. Representa gráficamente los números complejos:

   a) $3 + 4i$
   b) $3 - 2i$
   c) $1 - 2i$
   d) $-2 + i$
   e) 6
   f) $5i$
   g) $1 - \sqrt{3}i$
   h) $-1 + i$

3. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

   a) 9

b) $-3i$
c) $-3i+1$
d) $3+\frac{1}{2}i$
e) $\frac{1}{3}i$
f) $2-7i$
g) $\frac{\sqrt{3}}{7}-\frac{1}{\sqrt{5}}i$
h) $a-bi$

4. Representa gráficamente todos los números complejos z tales que al sumarlos con su respectivo conjugado, se obtenga dos; es decir: $z+\overline{z}=2$.

5. Representa gráficamente los números complejos z tales que $z-\overline{z}=2$. ¿Qué debe verificar z?.

6. Escriba en forma trigonométrica y polar los complejos:

   a) $4+3i$
   b) $-1+i$
   c) $5-12i$
   d) $\sqrt{3}+\sqrt{5}i$

7. Calcular tres argumentos del número complejo $z=1-i$.

8. ¿Cuáles son el módulo y el argumento del conjugado de un número complejo cualquiera?.

9. Expresa en forma binomial y en forma polar el conjugado y el opuesto del número complejo $z=63\ \angle 25^0$

10. Escribe en forma binomial el complejo $r=2(cos45^0+isen45^0)$. Representar gráficamente.

11. El módulo de un número complejo es 5 y su argumento 600^0. Escribe el número en forma trigonométrica.

12. ¿Qué argumento tiene el siguiente número complejo? $4(3-2i)+5(-2+i)$.

13. Escribe todos los números complejos que pertenezcan a la circunferencia de centro $(1,2)$ y radio 5.

14. ¿Qué figura representan en el plano los puntos que tienen de coordenadas polares $3,\angle\theta,\theta$ variable? ¿y los que tienen $r,\angle 90^0$, r variable?

15. Dado $z=r,\measuredangle\theta$. Expresar en forma polar:

    a) $-z$
    b) $z-1$

16. Efectúa las siguientes operaciones entre números complejos:

a) $(2+3i)+(4-i)$

b) $(3+3i)-(6+2i)$

c) $(3-2i)+(2+i)-2(-2+i)$

d) $(2-i)-(5+3i)+\frac{1}{2}(4-4i)$

17. Multiplica los siguientes números complejos:

a) $1+2i; 3-2i$

b) $2+i; 5-2i$

c) $i+1; 3-2i; 2+2i$

d) $3(2-i); 2+3i; i$

18. Efectúa las siguientes divisiones de numeros complejos:

a) $\frac{2+i}{1-2i}$

b) $\frac{7-i}{3+i}$

c) $\frac{5+5i}{3-i}$

d) $\frac{5+5i}{3-i}$

e) $\frac{3-i}{2+i}$

f) $\frac{18-i}{3+4i}$

19. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $5-3(3+\frac{2}{3}i)$

b) $\frac{2i(-i+2)}{1+i}$

c) $\frac{(-2i)2(1+3i)}{4+4i}$

d) $\frac{(1+3i)(1+2i)}{1+i}$

20. Dado el número complejo $z=2+2i$, calcula y representa:

a) su conjugado $\overline{z}$

b) la suma $z+\overline{z}$

c) el producto $z\cdot\overline{z}$

21. Efectúa los siguientes productos y expresa el resultado en forma polar y binomial:

a) $(\cos 30^0 + i\sin 30^0)\cdot 2(\cos 15^0 + i\sin 15^0)$

b) $2(\cos 23^0 + i\sin 23^0)\cdot 3(\cos 37^0 + i\sin 37^0)$

c) $5(\cos 33^0 + i\sin 33^0)$

d) $(2+2i)(1-i)$

22. Efectuar las siguientes operaciones:

a) $(210\angle 5^0)(38\angle 5^0)$

b) $(46\angle 5^0)(21\angle 5^0)$

c) $(52\angle 2^0)(22\angle 8^0)(13\angle 0^0)$

d) $\dfrac{41\angle 50^0}{2\angle(\pi/2)}$

23. Simplifica las expresiones

a) $\dfrac{(3\angle 45)(2\angle 15)}{6\angle 30}$

b) $\dfrac{(2\angle 30)(3\angle 60)}{(3\angle 120)(1\angle 300)}$

c) $\dfrac{(2\angle 45)(2\angle 15)}{4\angle 90}$

24. Resolver las ecuaciones:

a) $x^3 - 27 = 0$

b) $x^5 + 32 = 0$

25. Dados $z = (1,3), w = (2,1)$. Hallar $z - w; \dfrac{z \cdot w}{z - 1}$

26. Dados $z = -1 + 3i, w = -2 + i$. Calcular y representar:

a) $z + w$

b) $z \cdot w$

c) $z \cdot 2$

d) $z + \overline{w}$

e) $\dfrac{z}{w}$

27. Hallar:

$$\frac{i^{32} \cdot i^{17}}{i^2 \cdot i^3}$$

28. Hallar el módulo de los complejos:

a) $-2i(1 + i)(-2 - 2i)3$

b) $\dfrac{(1 - i)(1 + i)}{(2 - i)(-1 + 2i)}$

29. Representa gráficamente las sumas:

a) $(-i) + (3 - i)$

b) $(-2 + i) + (3 - 2i)$

30. Representa gráficamente el número complejo $3 - 2i$. Aplícale un giro de 90^0 alrededor del origen. ¿Cuál es el nuevo número complejo?

31. Hallar el módulo de:
$$z = \frac{2-4i}{4+2i}$$

32. Resuelve las siguientes ecuaciones y mencione en que campo numérico tiene solución:

    a) $x^2 + 4 = 0$
    b) $x^2 - 9 = 0$
    c) $x^2 + 1 = 0$

33. Resuelve las ecuaciones:

    a) $x^2 - 2x + 5 = 0$
    b) $x^2 - 6x + 13 = 0$
    c) $x^2 - 4x + 5 = 0$

34. Encuentra los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2$ y la recta $y = x$. ¿Son soluciones reales o imaginarias?

35. Encuentra los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ y la recta $y = x-3$. ¿Son soluciones reales o imaginarias?

36. ¿A qué campo numérico pertenecen las soluciones de estas ecuaciones?

    a) $x^2 - 3x + 2 = 0$
    b) $x^2 - 2x + 2 = 0$
    c) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
    d) $\frac{x^2}{2} + 8 = 0$

37. Representa gráficamente las raíces de las ecuaciones:

    a) $x^2 + 4 = 0$
    b) $x^2 + 1 = 0$
    c) $x^2 - 9 = 0$
    d) $x^2 + 9 = 0$

38. Escribe una ecuación de segundo grado cuya raíces sean $2+2i$ y $2-2i$. (Recuerda que $x_1 \cdot x_2 = -\frac{b}{a}$ y $x_1 + x_2 = \frac{c}{a}$ donde x_1, x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$)

39. Resuelva la ecuación $x^3 + 27 = 0$. Representa gráficamente todas sus soluciones.

40. Escribe una ecuación de raíces de la ecuación $1 + 3i; 1 - 3i$

41. Probar que $3 + i$ y $3 - i$ son raíces de la ecuación $x^2 - 6x + 10 = 0$

42. Resolver la ecuación:
$$x^4 + 1 = -35$$

43. Hallar las potencias:

a) $(2-3i)^3$
b) $(3+i)^2$
c) i^{23}
d) $(2+2i)^4$

44. Sabemos que $z_1 = 3-2i, z_2 = 4-3i, z_3 = -3i$. Calcular:

a) $z_1 + 2z_2 - z_3$
b) $z_1 \cdot (z_2 + z_3)$
c) z_2^2
d) $2z_1 - z_2 + z_3$

45. Calcular las potencias:

a) $[2(\cos 45^0 + i \sin 45^0)]4$
b) $(\sqrt{2}\angle 30^0)^6$
c) $[\sqrt[4]{3}(\cos 10^0 + i \sin 10^0)]^8$

46. Calcular:

$$\sqrt[3]{\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}}$$

47. Hallar las raíces de:

a) $\sqrt{4(\cos 60^0 + i \sin 60^0)}$
b) $\sqrt[4]{81(\cos 120^0 + i \sin 120^0)}$

48. Si $z = 1+i$. Hallar el valor de la fracción:

$$\frac{z^3+z}{z^2+2}$$

De igual manera, hallar para $\overline{z} = 1-i$

49. Hallar el módulo y el argumento de:

$$\left(\frac{2+2i}{2-2i}\right)^4$$

50. ¿Cuánto debe valer x para que el número $(1+xi)^2$ sea imaginario puro?.

51. Hallar los números x e y para que se verifique la igualdad:

$$(3+xi)+(y+3i) = 5+2i$$

52. Determina x para que el producto $(3+2i)(6+xi)$ sea:

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

53. Determine los números reales x e y para que se cumpla:

$$\frac{x+2i}{1-i}+yi=1$$

54. Resolver: $\dfrac{4+xi}{2+i}=y+2i$

55. Resolver los siguientes sistemas:

 a) $\begin{cases} (2+i)x+2y=1+7i \\ (1+i)x+iy=0 \end{cases}$

 b) $\begin{cases} (1+i)a+(2+i)b=9+2i \\ 2a-ib=5-4i \end{cases}$

 c) $\begin{cases} (1+2i)a+(1+i)b=5+5i \\ (2+i)a+ib=2+2i \end{cases}$

 d) $\begin{cases} ai+(2+i)b=-3+7i \\ (2-i)a+(2+i)b=5+3i \end{cases}$

56. Hallar z en las siguientes ecuaciones:

 a) $\dfrac{z}{1-2i}+1-i=2+i$

 b) $\dfrac{z}{2+i}+\dfrac{z-i}{2-i}=3-2i$

57. Hallar $(1+i)^5$

58. Encuentra la parte real y la parte imaginaria de $e^{(3+4i)x}$

59. Hallar la parte real y la parte imaginaria de:

$$\frac{(1-i)^{10}}{(i\sqrt{3}-1)^4}$$

60. Hallar dos números complejos z y w tales que su suma sea i y $2i$ es una raíz cuadrada de su cociente.

61. Se sabe que $e^{\frac{\pi}{4}i}$ es una raíz cúbica de un cierto número complejo. Hallar dicho número y sus dos raíces cúbicas restantes.

62. Se sabe que la suma de dos números complejos z y w es 3 y que $\frac{\pi}{2}i$ es un logaritmo neperiano de $\frac{z}{w}$. Hallar dichos números.

63. Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

 a) $i^z=1$

 b) $e^{i-z}=1-i$

c) $i^z = 1 - i$

64. Resolver en $\mathbb{C}$ la siguiente ecuación:

    a) $z^2 - 2z - 2 + 4i = 0$
    b) $z^4 + (4 - 2i)z^2 - 8i = 0$

65. Si z_1 y z_2 son complejos. ¿Qué representa el número $\dfrac{z_1 + z_2}{2}$? ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos $\lambda z_1 + \mu z_2$ si λ y μ son reales que verifican $\lambda + \mu = 1$?

66. Demuestre que si los puntos z_1, z_2, z_3 son los vertices de un triángulo equilátero, entonces
$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$$

67. Indicar si es correcto o falso el enunciado siguiente: si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ de módulo 1, entonces:
$$|z_1 + z_2| = 2 \Longleftrightarrow z_1 = z_2$$

68. Dos números complejos no nulos son tales que $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$. Probar que $\frac{z_1}{z_2}$ es imaginario.

69. Escribir en forma binomial ($z = x + iy$) el complejo
$$z = \left(\frac{1 + \cos x + i \sin x}{1 + \cos x - i \sin x} \right)^n$$

70. Sabiendo que $z + \frac{1}{z} = 2 \cos t$ donde $t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$. Hallar lo más simplificado posible
$$z^n + \frac{1}{z^n}$$

71. Calcular el siguiente número complejo:
$$z = \frac{2}{i} \log \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)$$

72. Dado $a + bi = \log \sqrt{w}$ siendo w tal que $\frac{w}{1 + i\sqrt{3}}$ es real y el módulo de w es la unidad. Hallar $a + bi$

73. Sea $z \in \mathbb{C}$ cuya representación binomial es $z = a + bi$ y consideramos la potencia $(1+i)^z$ se pide, para cada una de las condiciones siguientes el conjunto de todos los complejos que la cumplen y un ejemplo:

    a) Que la potencia tenga algún valor real.
    b) Que la potencia tenga resultado único.
    c) Que la potencia tenga sólo un número finito de resultados.
    d) Que la potencia tenga todos los resultados con el mismo módulo.
    e) Que la potencia tenga todos los resultados con el mismo argumento.

74. Hallar
$$\log_{2-2i}(1+i)$$

75. Hallar la relación que deben verificar los coeficientes a, b, c, d reales para que las raíces de la ecuación:
$$z^2 + (a+bi) + (c+di) = 0$$
tenga el mismo argumento.

76. ¿Bajo qué condiciones el cociente de un número complejo con su conjugado es un número real? ¿Qué condición deben cumplir dos números complejos para que su cociente sea imaginario puro?

77. Mediante la transformación $w = az + b$ los número $z_1 = 6 + 2i, z_2 = 8 + 2i$ y $z_3 = 7 + (2 + 5\sqrt{3})i$ se transforman en $w_1 = -2 + 5i, w_2 = -2 + 7i$ y $w_3 = -(2 + 5\sqrt{3}) + 6i$, respectivamente. Hallar a y b.

78. Hallar $z = (1+i)^n$ y escribirlo en forma binómica para el caso $n = 25$.

79. Simplificar la expresión:
$$\left(\frac{1+\sin\theta + i\cos\theta}{1+\sin\theta - i\cos\theta}\right)^6$$

80. Hallar:
$$[(\sin a - \sin b) + i(\cos a - \cos b)]^n$$

81. Hallar $\sin(3\theta)$ en función de $\sin\theta$

82. Sabiendo que $2\cos\theta = z + \frac{1}{z}$ obtener $2\cos(n\theta)$.

83. Demostrar que:
$$\frac{\sin(4\theta)}{\sin\theta} = 8\cos^3\theta - 4\cos\theta$$

84. Hallar los números complejos cuyo cubo sea igual al cuadrado de su conjugado

85. Hallar las raíces sextas de $4\sqrt{3} + 4i$

86. En cada caso, hallar todas las raíces en coordenadas rectangulares, dibujarlas como vétices de ciertos polígonos rectangulares e indicar cuál es la raíz principal.

    a) $(-1)^{1/3}$
    b) $8^{1/6}$

87. Como las tres raíces cúbicas de un número complejo z_0 no nulo se pueden expresar como $c_0, c_0\omega_3, c_0\omega_3^2$, donde c_0 es la raíz cúbica principal de z_0 y
$$\omega_3 = exp(i\frac{2\pi}{3}) = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$
Probar que si $z_0 = -4\sqrt{2} + i4\sqrt{2}$, entonces $c_0 = \sqrt{2}(1+i)$ y las otras dos raíces cúbicas son, en forma rectangular, los números:
$$c_0\omega_3 = \frac{-(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i}{\sqrt{2}}, \quad c_0\omega_3^2 = \frac{(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+1)i}{\sqrt{2}}$$

88. *a*) Probar que la fórmula usual resuelve la ecuación cuadrática

$$az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

cuando los coeficientes a, b y c son números complejos. Esto es, completando el cuadrado en el miembro de la izquierda, deducir la *fórmula cuadrática*

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde ambas raíces cuadradas se consideran cuando $b^2 - 4ac \neq 0$

b) Usar el resultado de apartado *a*) para hallar las raíces de la ecuación $z^2 + 2z + (1 - i) = 0$

89. Representar gráicamente los siguientes conjuntos y discutir si son dominios:

a) $|z - 2 + i| \leq 1$

b) $|2z + 3| > 4$

c) $Im(z) > 1$

d) $Im(z) = 1$

e) $0 \leq arg(z) \leq \frac{\pi}{4} \quad (z \neq 0)$

f) $|z - 4| \geq |z|$

90. ¿Cuáles de los conjuntos del ejercicio anterior no son abiertos ni cerrados?

$\exists! \int_M \alpha^r$.