ESCUELA MILITAR DE INGENIERIA
ÁLGEBRA
Misceláneas de problemas
2014

Tema: Números $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$.

Elaborado por: ***Lic. Bismar Choque Nina***

La matemática pura es aquella ciencia
en la que uno no sabe de qué está hablando
ni si lo que está diciendo es verdad.
(Bertrand Russell)

AXIOMAS DE PEANO E INDUCCIÓN MATEMÁTICA.

La inducción es un modo de razonar que conduce al descubrimiento de leyes generales a partir de la observación de ejemplos particulares y de sus combinaciones. Se emplea en todas las ciencias, aún en Ingeniería. La inducción matemática se emplea para demostrar cierto tipo de leyes o teoremas.

1. Con la definición de Peano, para la suma, probar que se cumple la ley cancelativa en $\mathbb{N}$
$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a + c = b + c \Rightarrow a = b$$

2. Con la definición de Peano, para la multiplicación, probar que se cumple la ley cancelativa en $\mathbb{N}$
$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a \cdot c = b \cdot c \Longrightarrow a = b$$

Los siguientes enunciados, demostrar por inducción matemática.

3. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

4. $\sum\limits_{i=1}^{n} i^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

5. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+2)} = \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$

6. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

7. $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

8. $\sum_{i=0}^{n-1} x^i = \frac{1-x^n}{1-x}$ si $x \neq 1$

9. $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$

10. $\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$

11. $\sum_{i=1}^{n} i2^i = 2 + (n-1)2^{n+1}$

12. $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^i = 2 - \frac{2^{n+1}}{3^n}$

13. $\sum_{i=1}^{n} 3^i = \frac{3}{2}(3^n - 1)$

14. Considere la tabla (suma de enteros positivos pares).

$$\begin{aligned} 2 &= 1 \cdot 2 \\ 2+4 &= 2 \cdot 3 \\ 2+4+6 &= 3 \cdot 4 \\ 2+4+6+8 &= 4 \cdot 5 \end{aligned}$$

a) Deduzca la ley general sugerida por esos ejemplos, exprésela por medio de una fórmula matemática apropiada.

b) Encontrar otra forma de deducir la misma fórmula.

Ayuda: $2+4+6+8 = 2(1+2+3+4)$ y $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

15. Considérese la tabla:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \end{aligned}$$

Deduzca la ley general sugerida por esos ejemplos, exprésela por medio de una fórmula matemática apropiada.

16. La fórmula para $1^2+2^2+\cdots+n^2$ puede deducirse como sigue. Empezamos con la fórmula

$$(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$$

Escribiendo esta fórmula para $k=1,2,3,...,n$ y sumando obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} 2^3-1^3 &=& 3\cdot 1^2+3\cdot 1+1 \\ 3^3-2^3 &=& 3\cdot 2^2+3\cdot 2+1 \\ \vdots & & \vdots \\ (n+1)^3-n^3 &=& 3\cdot n^2+3\cdot n+1 \\ \hline (n+1)^3-1 &=& 3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n \end{array}$$

Como

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

sustituyendo y simplificando, tenemos

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Así podemos encontrar $1^2+2^2+\cdots+n^2$ si ya conocemos $1+2+\cdots+n$ (que podría haberse hallado de modo parecido). Utilizar este método para hallar:

a) $1^3+2^3+\cdots+n^3$

b) $1^4+2^4+\cdots+n^4$

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

d) $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

17. Considere las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 2+3+4 &= 1+8 \\ 5+6+7+8+9 &= 8+27 \\ 10+11+12+13+14+15+16 &= 27+64 \end{aligned}$$

Conjeture la fórmula general sugerida por estas cuatro ecuaciones y demuestre por inducción.

18. Considere las siguientes seis ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1-4 &= -(1+2) \\ 1-4+9 &= 1+2+3 \\ 1-4+9-16 &= -(1+2+3+4) \\ 1-4+9-16+25 &= 1+2+3+4+5 \\ 1-4+9-16+25-36 &= -(1+2+3+4+5+6) \end{aligned}$$

Conjeture la fórmula general sugerida por estas seis ecuaciones y demuestre su conjetura por inducción.

19. Formular y demostrar por inducción el siguiente teorema de Nicomachus (siglo I d.J.C.):

$$1^3 = 1, 2^3 = 3+5, 3^3 = 7+9+11, 4^3 = 13+15+17+19, \text{etc.}$$

20. Calcular la suma de todos los múltiplos positivos de:

a) 4 que son menores que 75.

b) 6 que están entre 50 y 200.

c) 3 que son menores que 99.

21. El tercer término de una progresión aritmética es -3 y el octavo término es 2. Hallar la diferencia y el sexto término.

22. El quinto término de una progresión aritmética es 2 y el noveno término es -10. Obtener el séptimo término y la suma de los primeros 12 términos.

23. *a*) Un número está formado por 5 dígitos en progresión aritmética. La suma de todos sus dígitos es 25 y la suma de los últimos tres dígitos es 12. Encuentre el número.

    b) La suma de tres números en progresión geométrica es 38 y su producto es 1728. Encuentre los números.

24. En cada uno de los ejercicios, efectuar el desarrollo indicado:

    a) $(3a-b)^4$

    b) $(a+b-c)^3$

    c) $(x+1)^4+(x-1)^4$

En cada ejercicio, obtener solamente el término o términos indicados en el desarrollo correspondiente:

25. Cuarto término de $(a-2b)^9$

26. Quinto término de $(x+y/2)^7$

27. Término central de $(x/y+y/x)^8$

28. Los dos términos centrales de $(x^2/2-y)^8$

29. El término independiente de x de $[2x73-3/(2x)]^6$

30. En la expresión
$$\left(2\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$$
hallar x para que el tercer término del desarrollo del binomio valga 240

31. En el desarrollo de:
$$\left(x^2-\frac{a}{x}\right)^n$$
los coeficientes binómicos de los términos cuarto y decimotercero son iguales. Hallar el término que no contiene x.

32. El siguiente binomio posee 16 términos, hallar el término onceavo de su desarrollo:
$$\left(\frac{x^{n-7}}{y^{n+2}}+\frac{y^{2n-3}}{x^{3n-11}}\right)^{n+10}$$

33. Los números de Fibonacci se definen en forma recursiva como:

    a) $F_0 = 0, \qquad F_1 = 1$

    b) $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$

    Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$.

    a) $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$

    b) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

34. La sucesión de los números de Lucas se definen en forma recursiva como:

    a) $L_0 = 2, \qquad L_1 = 1$

    b) $L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \qquad \forall n \geq 2$

    Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}$:

    a) $\sum\limits_{i=1}^{n} L_i = L_{n+2} - 1$

    b) $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$

35. $\alpha^n - 1 \geq n(\alpha - 1)$ si $\alpha > 1$

36. $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ si $x > 0$

37. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n < \dfrac{1}{n}$

38. $2^n < n!$

39. $n < \dfrac{n^2 - n}{12} + 2$

40. $n^2 + n$ es un número par $\forall n \in \mathbb{N}$

41. $\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{9}\right)\left(1 - \dfrac{1}{16}\right)\cdots\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{n+1}{2n} \qquad \forall n \geq 2$

42. $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$

43. Hallar x en:

$$2 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! + \cdots + (x + 2) \cdot (x + 2)! = 22!$$

DIVISIBILIDAD.

44. Demostrar que si $a|b$, entonces $a|bc$.

45. Demostrar que si $a|b$ y $b|c$, entonces $a|c$.

46. Demostrar que si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(xb + yc)$.

47. Demostrar que si a y b son enteros positivos tales que $a|b$ y $b|a$, entonces $a = b$.

Demostrar por inducción Matemática.

48. $3 \mid 10^{n+1} + 10^n + 1$

49. $2 \mid n^2 + n$

50. $3 \mid 3^{2n} + 5$

51. $3 \mid 10^{n+1} + 10^n + 1$

52. $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

53. $54 \mid 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$

54. $9 \mid n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$

55. $3 \mid 8^n - 5^n$

56. $a^n - b^n = \alpha(a - b)$

57. Demuestre $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n^7}{7} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{11n}{21}$ es un entero.

58. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}, x^{2n} - y^{2n}$ es divisible entre $x - y$.

59. Demuestre que para dodo $n \in \mathbb{N}, x^{2n+1} + y^{2n+1}$ es divisible entre $x + y$

MAXIMO COMUN DIVISOR.

Tomando en cuenta que el

$$(a, b) = (a, -b) = (-a, b) = (-a, -b)$$

encontrar los máximos comunes divisores indicados usando el algoritmo de Euclides y expresarlos como una función lineal homogénea.

60. $(172, 64)$

61. $(323, 221)$

62. $(-816, 7209)$

63. $(7469, 2387)$

64. $(117, 169)$

65. $(884, 1292)$

66. $(-5376, -3402)$

67. $(11143, 8749)$

En los siguientes ejercicios encontrar enteros x e y tales que cada enunciado sea verdadero:

68. $2 = 78x + 32y$.

69. $7 = 31x + 19y$.

70. $3 = 288x + 51y$.

71. $87 = 145x + 58y$.

72. $13 = 104x + 91y$.

73. $16 = 42x + 26y$.

74. $1 = 52x + 13y$.

75. $-2 = 17x + 5y$.

En los siguientes ejercicios, encontrar los máximos comunes divisores indicados, usando el algoritmo de Euclides.

76. $(624, 504, 90)$

77. $(209, 299, 102)$

78. $(285, 675, 405)$

79. $(69, 598, 253)$

80. $(116, 248, 148, 152)$

81. $(1131, 594, 2907, 1517)$

En los siguientes ejercicios encontrar w, x, y, z tales que cada enunciado sea verdadero:

82. $1 = 11x + 19y + 3z$

83. $2 = 56x + 6y + 32z$

84. $9 = 6x + 3y + 15z$

85. $4 = 14x + 7y + 21z$

86. $15 = 120w + 30x + 60y + 165z$

87. $1 = 21w + 9x + 3y + 6z$

CONGRUENCIA LINEAL.

88. Determinar cuál de los siguientes enunciados es verdadero.

    a) $37 \equiv 19 (\text{mod } 3)$
    b) $10 \equiv 10 (\text{mod } 9)$
    c) $56 \equiv 11 (\text{mod } 15)$
    d) $42 \equiv -8 (\text{mod } 10)$

En los siguientes ejercicios, encontrar un conjunto de soluciones (incongruentes) para cada congruencia lineal.

89. $14x \equiv 11 (\text{mod } 5)$

90. $6x \equiv 8 (\text{mod } 20)$

91. $12x \equiv 98 (\text{mod } 20)$

92. $3x \equiv 10 (\text{mod } 14)$

93. $8x \equiv 16 (\text{mod } 12)$

94. $23x \equiv 8 (\text{mod } 17)$

95. $11x \equiv -15 (\text{mod } 10)$

96. $12x \equiv 17 \pmod{27}$

97. $25x \equiv 13 \pmod{60}$

98. $14x \equiv 36 \pmod{48}$

99. $4x - 3 \equiv 6 \pmod{7}$

100. $3x + 6 \equiv 5 \pmod{11}$

101. $32x \equiv 28 \pmod{36}$

102. $5x \equiv -20 \pmod{125}$

103. $6x \equiv 15 \pmod{21}$

104. $7x \equiv 14 \pmod{21}$

105. $49x \equiv 23 \pmod{25}$

106. $22x \equiv 77 \pmod{121}$

107. $51x \equiv 9 \pmod{54}$