ESCUELA MILITAR DE INGENIERIA
ALGEBRA I
Misceláneas de problemas
2014
Tema: Estructuras Algebraicas.

Estructuras Algebraicas.

Para cada operación binaria $*$ definida en el conjunto señalado dígase cuándo $*$ dota al conjunto de una estructura de grupo. De no resultar grupo, mencione que axioma no cumple.

1. Definase $*$ en $\mathbb{Z}$ por $a * b = ab$
2. Definase $*$ en $\mathbb{Z}$ por $a * b = a - b$
3. Definase $*$ en $\mathbb{R}^+$ por $a * b = ab$
4. Definase $*$ en $\mathbb{Q}$ por $a * b = ab$
5. Definase $*$ en el conjunto de todos los números reales distintos de cero por $a * b = ab$
6. Definase $*$ en $\mathbb{C}$ por $a * b = a + b$
7. Dése una tabla para una operación binaria en el conjunto $\{e, a, b\}$ de tres elementos que cumplan los axiomas de la identidad e inverso de grupo, pero no se cumpla la asociatividad.
8. Sea G el conjunto de todos los números reales excepto -1. Defínase $*$ en G por:

   $$a * b = a + b + ab$$

   a) Muestre que $*$ da una operación binaria.

   b) Muestre que $\langle G, * \rangle$ es un grupo.

   c) Encuentrese la solución de la ecuación $2 * x * 3 = 7$ en G.
9. Demuestre que todo grupo G con identidad e tal que $x * x = e$ para todas las $x \in G$, es abeliano. (Sugerencia: considérese $(ab)^2$.)
10. Demuestre que un conjunto no vacío G junto con una operación binaria $*$ en G tal que las ecuaciones

    $$a * x = b \quad y * a = b$$

    tienen soluciones en G para todas las $a, b \in G$, es un grupo.

11. En $\mathbb{R}^+$ se define $*$ mediante
$$a * b = 2ab$$
Verificar que $\langle \mathbb{R}^+, * \rangle$ es grupo abeliano.

12. En el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos se considera $*$ definida por:
$$a * b = a + b - i$$
Probar que $\langle \mathbb{C}, * \rangle$ es grupo abeliano.

13. En $\mathbb{R}^I = \{f / f : [0,1] \to \mathbb{R}\}$ se define la suma de funciones por medio de:
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
Demostrar que $\langle \mathbb{R}^I, + \rangle$ es grupo abeliano.

14. En el conjunto $\mathbb{N}$, de los números naturales, se define la siguiente operación $*$. Dados a y b cualesquiera pertenecientes a $\mathbb{N}$
$$a * b = ab + 1$$
   a) Hallar:
      1) $(1 * 2) * 3$
      2) $1 * (2 * 3)$
      3) $(1 * 2) * (3 * 2)$
      4) $(2 * 3) * (2 * 1)$
   b) Es asociativa?
   c) Es conmutativa?

15. Se define la ley de composición interna $*$ en el conjunto $A = \{0, 1, 2, 3\}$ mediante la siguiente tabla:

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Si a y b son dos elementos de A, el resultado de operar a con b se halla en la intersección de la fila a con la columna b.

   a) Hallar:
      1) $3 * (2 * 1)$
      2) $(3 * 1) * 2$
      3) $(0 * 2) * (2 * 3)$
      4) $(3 * 0) * (2 * 2)$
   b) Es conmutativa?

c) Posee elemento neutro?, si es así cual es?

d) Es asociativa?

e) Posee elemento inverso?, si es así cual es?

16. En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, se define la operación $*$ mediante

$$a * b = \frac{a+b}{2}$$

¿Qué propiedades cumple dicha operación?.

17. En el conjunto $\mathbb{Z}$, se establece la siguiente operación $*$:

$$a * b = a(b+1) + b(a+1)$$

¿Qué propiedades cumple dicha operación?

18. En el conjunto $\mathbb{Q}$, se definen las leyes de composición interna $*$ y $\circ$ mediante:

$$a * b = \frac{a+b}{3} \qquad a \circ b = 3ab$$

Investigar las distributividades de $\circ$ respecto de $*$.

19. En el conjunto $\mathbb{Z}$, se define la ley de composición interna $*$ mediante:

$$a * b = a$$

Probar que $\langle \mathbb{Z}, * \rangle$ es grupo.

20. En el conjunto $\mathbb{R}^+$, se establece la operación $*$ mediante:

$$a * b = \sqrt{3}ab$$

Determinar si $\langle \mathbb{R}^+, * \rangle$ es grupo abeliano.

21. Demostrar que $\langle \mathbb{R}^2, + \rangle$ es grupo abeliano, siendo el conjunto de pares ordenados de número reales, y la suma definida por:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

22. Determínese cuáles de los siguientes subconjuntos de los números complejos son subgrupos bajo la suma de grupo $\mathbb{C}$ de los números complejos bajo la suma.

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{Q}^+$

c) $7\mathbb{Z}$

d) El conjunto $i\mathbb{R}$ de los números imaginarios puros incluyendo 0.

e) El conjunto $\pi\mathbb{Q}$ de los múltiplos racionales de π

f) El conjunto $\{\pi^n / n \in \mathbb{Z}\}$

23. ¿Cuáles de los siguientes grupos son cíclicos? Para cada grupo cíclico obetener todos los generadores del grupo.

    a) $G_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$
    b) $G_2 = \langle \mathbb{Q}, + \rangle$
    c) $G_3 = \langle \mathbb{Q}^+, \cdot \rangle$
    d) $G_4 = \langle 6\mathbb{Z}, + \rangle$
    e) $G_5 = \{6^n / n \in \mathbb{Z}\}$ bajo la multiplicación.
    f) $G_6 = \{a + b\sqrt{2} / a, b \in \mathbb{Z}\}$

24. *a*) Por analogía, complétese la tabla para obtener el grupo cíclico Z_6 de 6 elementos (No es necesario probar la ley asociativa)

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2					
3	3					
4	4					
5	5					

    b) Calcular los subgrupos $\langle 1 \rangle, \langle 2 \langle, \langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle$ y $\langle 5 \rangle$ del grupo $\mathbb{Z}_6$
    c) Qué elementos son generadores para el grupo $\mathbb{Z}_6$ de la parte *a*)

25. Sea G un grupo y a un elemento fijo de G, muestre que:

$$H_a = \{x \in G / xa = ax\}$$

es un subgrupo de G.

26. Sea H un subgrupo de un grupo G. Para $a, b \in G$ sea $a \sim b$ si y sólo si $ab^{-1} \in H$. Demuestre que $\sim$ es una relación de equivalencia en G.

27. Para los conjuntos H y K defínase la intersección $H \cap K$ por:

$$H \cap K = \{x / x \in H \land x \in K\}$$

Demuestre que $H \leq G$ y $K \leq G$, entonces $H \cap K \leq G$.

28. Sea A un conjunto no vacio, en el que se han definido dos operaciones, $+$ y $\circ$ respectivamente. Si $\langle A, + \rangle$ es un grupo abeliano, y se define $\circ$ mediante

$$a \circ b = 0$$

entonces verificar que la terna $\langle A, +, \circ \rangle$ es un anillo conmutativo.

29. Probar que la terna $\langle \mathbb{Z}^2, +, \circ \rangle$ es un anillo conmutativo con identidad. Siendo $\mathbb{Z}^2$ el conjunto de pares ordenados de números enteros, $+$ la suma habitual y $\circ$ definida por:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, ad + bc)$$

30. Sea $\langle G, * \rangle$ un grupo. En G se define la operación $\circ$ mediante:

$$a \circ b = b * a$$

Demostrar que $\langle G, \circ \rangle$ es un grupo.

31. Sea $G = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$. Definimos la operación binaria en G como

$$a \circ b = a + b + ab$$

Demuestre que $\langle G, \circ \rangle$ es un grupo abeliano.

32. En $\mathbb{Z}$ se define la operación binaria $\circ$ como $a \circ b = a + b + 1$. Demuestre que $\langle \mathbb{Z}, \circ \rangle$ es un grupo abeliano.

33. Sea $A = \{1, 2\}$ y $\mathcal{P}(A)$ el conjunto partes de A. Demuestre que $\langle \mathcal{P}(A), \triangle, \cap \rangle$ es un anillo conmutativo con identidad.

34. Sea A un conjunto y $\mathcal{P}(A)$. ¿Es$\langle \mathcal{P}(A), \cup, \cap \rangle$ un anillo?

35. Considere el conjunto $\mathbb{Z}$ junto con las operaciones binarias $*$ y $\circ$ definidas por

$$a * b = a + b + 1 \qquad a \circ b = a + b - ab$$

   a) Demuestre que $\langle \mathbb{Z}, *, \circ \rangle$ es un anillo

   b) Es conmutativo este anillo?

   c) Es un anillo con identidad?

36. Sea n, m enteros fijos. Encuentre todos los valores de n, m para los que $\langle \mathbb{Z}, *, \circ \rangle$ es un anillo con las operaciones binarias

$$a * b = a + b - n \qquad a \circ b = a + b - mab$$

37. Demostrar que la composición de dos homomorfismos de grupos es un homomorfismo.

38. Sea $Aut(G)$ es grupo de los automorfismos del grupo $\langle G, * \rangle$, con la composición de funciones. Demostrar que la función

$$F : G \to Aut(G)$$

definida por $F(a) = f_a$ es un morfismo.

39. El subgrupo H de G es normal, si y sólo si $uH = Hu$.

40. En $A = \{0, 1, 2, 3\}$ se define la adición y multiplicación mediante las tablas

$+$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

$\cdot$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	0	0	0
3	0	1	2	3

Comprobar que $\langle A, +, \cdot \rangle$ es un anillo no conmutativo y sin identidad.